ALLGEMEINE LÖSUNG DES 12-KUGEL-PROBLEMS

DOMINIK BRODOWSKI

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Folgende Rätselfrage ist in weiten Kreisen bekannt: 'Man hat 12 Kugeln. Von diesen ist eine entweder leichter oder schwerer, man weiß aber nicht, welche. Wie muss man vorgehen, um in 3 Wägungen mit einer Balkenwaage herauszufinden, welche der Kugel das andere Gewicht hat, und ob sie leichter oder schwerer ist?'. (Lösungsprinzip siehe http://www.brodo.de/german/pub/kugel/index.html)

Ich möchte hier nun der Frage nachgehen, aus maximal wie vielen Kugeln n, von denen eine ein anderes Gewicht aufweist, man mit w Wägungen ($w \in \mathbb{N} \setminus 1$) die gesuchte Kugel und die Art ihrer Abweichung eindeutig bestimmen kann.

2. Beweis 1 : $n \leq \frac{3^w-3}{2}$

2.1. **Behauptung.** Zunächst beweise ich, dass es höchstens möglich ist, in w Wägungen aus $\frac{3^w-3}{2}$ Kugeln die Lösung eindeutig zu bestimmen.

$$n \leq \frac{3^w - 3}{2}$$

2.2. **Teil 1.**

(1) Es gibt insgesamt $2n$ verschiedene mögliche Lösungen, da jede Kugel diejenige mit dem unterschiedlichen Gewicht sein kann, und jeweils die Fälle 'leichter' und 'schwerer' auftreten können.
(2) Durch jede Wägung können höchstens 3 verschiedene Fälle unterschieden werden, nämlich linke Waagschale schwerer, rechte Waagschale schwerer, und beide Seiten gleich schwer. Daher ergeben sich maximal 3^w unterschiedliche Äste

Nun muss jede Lösung einem Ast zuzuordnen sein. Daher ist $2n \leq 3^w$. Da 3^w aber kein Vielfaches von 2 ist, gilt:

$$2n \leq 3^w - 1$$

2.3. **Teil 2.** Bei der ersten Wägung, vor der noch keine Lösung ausgeschlossen werden kann, müssen auf jeder Seite gleich viele Kugeln k gewogen werden.

Schlägt die Balkenwaage zu einer Seite hin aus, dann können k Kugeln leichter oder k Kugeln schwerer sein, es sind also bei der weiteren Untersuchung nur noch $2k$ Fälle zu unterscheiden. Aus 2.2 (2) folgt dann, dass $2k \leq 3^{w-1} - 1$ sein muss.

Bleibt die Balkenwaage im Gleichgewicht, so müssen dann aus den restlichen Kugeln $(n - 2k)$ die richtige Lösung in $(w - 1)$ Wägungen gefunden werden können. Hierfür gilt, wie in Abschnitt 1 gezeigt wurde, die Bedingung $2(n-2k) \leq 3^{w-1} - 1$. Dies ist äquivalent zu $2n - 3^{w-1} + 1 \leq 4k$.

Man kann nun eine Doppelungleichung $2n - 3^{w-1} + 1 \leq 4k \leq 2 \cdot (3^{w-1} - 1)$ aufstellen, und der mittlere Teil kann wegen der Transitivität weggelassen werden:

$$\begin{aligned} 2n - 3^{w-1} + 1 &\leq 2 \cdot 3^{w-1} - 2 \\ n &\leq \frac{3^w - 3}{2} \end{aligned}$$

Somit wurde gezeigt, dass $n \leq \frac{3^w - 3}{2}$ gelten muss.

3. Definitionen und Hilfsbeweis

3.1. **Definitionen.** *neutrale Kugel*: Kugel, die nicht die gesuchte ist. Daher besitzt sie das normale Gewicht. Symbol hierfür : *ne*

$(A)/(B)$: genau in einer der zwei Kugelgruppen (A) und (B) ist die gesuchte Kugel enthalten.

evtl. leichtere (schwerere) Kugelgruppe: unter diesen Kugeln kann die gesuchte sein, und wenn sie in dieser Gruppe ist, dann ist sie leichter (schwerer). Als Symbol hierfür werden $\uparrow$ für evtl. leichtere Kugelgruppe und $\downarrow$ für evtl. schwerere Kugelgruppe verwendet.

3.2. **Hilfsbeweis.**

3.2.1. *Behauptung.* Wenn man 2 neutrale Kugeln und zusätzlich

(1) $\frac{3^m+1}{2}$ evtl. schwerere Kugeln (*a) und $\frac{3^m-1}{2}$ evtl. leichtere Kugeln (*b) hat, oder
(2) $\frac{3^m+1}{2}$ evtl. leichtere Kugeln (*a) und $\frac{3^m-1}{2}$ evtl. schwerere Kugeln (*b) hat,

so kann man innerhalb von m Wägungen die Lösung eindeutig bestimmen.

3.2.2. *Beweis durch vollständige Induktion.*

1.Schritt. $m = 1$ (Beweis für (1)). Man hat $\frac{3^m+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$ evtl. schwerere Kugeln (*a), und $\frac{3^m-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ evtl. leichtere Kugel (*b). Man wiegt nun die 2 evtl. schwereren Kugeln gegeneinander.

Schlägt die Balkenwaage in eine Richtung aus, ist die schwerere Kugel die Lösung, und sie ist schwerer als das Normgewicht.

Bleibt die Balkenwaage im Gleichgewicht, so ist die evtl. leichtere Kugel (die nicht gewogen wurde), die Gesuchte, und sie ist leichter als das Normgewicht.

Jeweils war die Lösung durch einen Wägevorgang eindeutig bestimmbar. Für (2) ist die Beweisführung analog.

2. Schritt. Bei I gilt: Man hat $\frac{3^m-1}{2}$ evtl. leichtere Kugeln (*a), und $\frac{3^m+1}{2}$ evtl. schwerere Kugeln (*b). Man wiegt nun nach folgendem Schema:

linke Seite $\frac{3^{m-1}+1}{2} \downarrow$ (aus Gruppe *b) und $\frac{3^{m-1}+1}{2} \uparrow$ (aus Gruppe *a)
rechte Seite $\frac{3^{m-1}-1}{2} \downarrow$ (aus Gruppe *b) und $\frac{3^{m-1}-1}{2} \uparrow$ (aus Gruppe *a) sowie 2 *ne*

(1) Linke Seite ist schwerer:
Die Lösung muss aus den $\frac{3^{m-1}+1}{2} \downarrow$ (links) oder aus den $\frac{3^{m-1}-1}{2} \uparrow$ (rechts) stammen. Die neutralen Kugeln stehen weiterhin zur Verfügung. Aus der Induktionsvoraussetzung (Fall (1)) folgt, dass dies dann lösbar ist.
(2) Rechte Seite ist schwerer:
Die Lösung muss aus den $\frac{3^{m-1}-1}{2} \downarrow$ (rechts) oder aus den $\frac{3^{m-1}+1}{2} \uparrow$ (links) stammen. Die neutralen Kugeln stehen weiterhin zur Verfügung. Aus der Induktionsvoraussetzung (Fall (2)) folgt, dass dies dann lösbar ist.

(3) Beide Seiten sind gleich schwer:
Man hat noch $\frac{3^m+1}{2} - \frac{3^{m-1}+1}{2} - \frac{3^{m-1}-1}{2} = \frac{3^{m-1}+1}{2}$ evtl. schwerere Kugeln (*a), und $\frac{3^m-1}{2} - \frac{3^{m-1}+1}{2} - \frac{3^{m-1}-1}{2} = \frac{3^{m-1}-1}{2}$ evtl. leichtere Kugeln (*b). Da man auch hier noch die zwei neutralen Kugeln hat, ist auch dieser Fall nach der Induktionsvoraussetzung (1) lösbar.

Somit wurde bewiesen, dass -unter der Voraussetzung, dass die Behauptung für $m-1$ richtig ist- die Behauptung auch für m gilt. Der Induktionsbeweis ist daher vollständig abgeschlossen. Analog verläuft der Beweis für Fall (2).

4. Beweis 2: $n = \frac{3^w-3}{2}$

4.1. **Behauptung.**

$$n = \frac{3^w - 3}{2}$$

4.2. **Erste Wägung.** Als erstes teile man die $\frac{3^w-3}{2}$ Kugeln in 3 gleich große Gruppen von je $\frac{3^{w-1}-1}{2}$ Kugeln ein. Zwei dieser Gruppen wiege man dann gegeneinander.

4.3. **Die beiden anfangs gewogenen Gruppen sind unterschiedlich schwer.** Man hat nun $\frac{3^{w-1}-1}{2}$ Kugeln (diejenigen, die auf der schwereren Seite lagen), unter denen eine schwerere sein kann (*a), und $\frac{3^{w-1}-1}{2}$ Kugeln (diejenigen, die auf der leichteren Seite lagen), unter denen eine leichtere Kugel sein kann (*b).

Andere Kugeln können die Lösung nicht mehr darstellen, daher hat man außerdem mindestens 1 neutrale Kugel (die man beliebig aus den zuerst nicht gewogenen nehmen kann).

Es sind noch $(w-1)$ Wägungen erlaubt.

4.3.1. *Behauptung.* Es reichen $w-1$ Wägungen aus, um aus $\frac{3^{w-1}-1}{2}$ evtl. schwereren Kugeln, und $\frac{3^{w-1}-1}{2}$ evtl. leichteren Kugeln die Lösung herauszufinden, wenn man 1 neutrale Kugel zur Verfügung hat.

4.3.2. *Beweis durch Induktion.*

1. Schritt: Die Behauptung ist für w=2 richtig. Man hat $\frac{3^{w-1}-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ evtl. leichtere Kugel, und $\frac{3^{w-1}-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$ evtl. schwerere Kugel. Man wiegt nun die evtl. schwerere Kugel gegen die neutrale. Ist die evtl. schwerere Kugel tatsächlich schwerer, so ist sie die Gesuchte, und sie ist schwerer. Ist die Balkenwaage im Gleichgewicht, so ist die evtl. leichtere Kugel die gesuchte, und sie ist leichter als das Normmaß. Somit ist hier innerhalb von $(w-1) = 1$ Wägungen die Lösung zu finden. q.e.d.

2. Schritt. Man wiegt nun:

linke Seite $\frac{3^{w-2}+1}{2}\downarrow$ und $\frac{3^{w-2}-1}{2}\uparrow$ gegen
rechte Seite $\frac{3^{w-2}-1}{2}\downarrow$ und $\frac{3^{w-2}-1}{2}\uparrow$ sowie 1 *ne.*

(1) Linke Seite ist schwerer:
Die Lösung muss aus den $\frac{3^{w-2}+1}{2}\downarrow$ (links) oder aus den $\frac{3^{w-2}-1}{2}\uparrow$ (rechts) stammen. Aus den nicht gewogenen Kugeln entnimmt man eine weitere neutrale Kugel. Aus den verbleibenden Kugelgruppen kann man -wie im Hilfsbeweis gezeigt wurde- innerhalb von $(w-2)$ Wägungen die Lösung bestimmen.

(2) Rechte Seite ist schwerer:
Die Lösung muss aus den $\frac{3^{w-2}-1}{2}\downarrow$ (rechts) oder aus den $\frac{3^{w-2}-1}{2}\uparrow$ (links) stammen. Die neutrale Kugeln steht weiterhin zur Verfügung. Dies ist also nach der Induktionsvoraussetzung lösbar.

(3) Beide Seiten sind gleich schwer
Man hat noch $\frac{3^{w-1}-1}{2}-\frac{3^{w-2}+1}{2}-\frac{3^{w-2}-1}{2}=\frac{3^{w-2}-1}{2}$ evtl. schwerere Kugeln (*a), und $\frac{3^{w-1}-1}{2}-\frac{3^{w-2}-1}{2}-\frac{3^{w-2}-1}{2}=\frac{3^{w-2}+1}{2}$ evtl. leichtere Kugeln (*b). Außerdem kann man aus den bei dieser Wägung gewogenen Kugeln eine weitere neutrale nehmen, so dass man dann zwei neutrale zur Verfügung hat, um in $(w-2)$ Wägungen aus den verbleibenden Kugeln die Lösung zu finden, was nach dem Hilfsbeweis möglich ist.

Abschluß der Induktion. Somit wurde bewiesen, dass -unter der Voraussetzung, dass die Behauptung für $w-1$ richtig ist- die Behauptung auch für w gilt. Der Induktionsbeweis ist daher vollständig abgeschlossen. q.e.d.

4.4. **Die beiden anfangs gewogenen Gruppen sind gleich schwer.** Man hat nun $\frac{3^{w-1}-1}{2}$ Kugeln, von denen jede die leichtere bzw. die schwerere sein kann.

Andere Kugeln können die Lösung nicht mehr darstellen, daher hat man außerdem mindestens 1 neutrale Kugel (die man beliebig aus den zuerst gewogenen nehmen kann).

Es sind noch $(w-1)$ Wägungen erlaubt.

4.4.1. *Behauptung.* Es reichen $w-1$ Wägungen aus, um aus $\frac{3^{w-1}-1}{2}$ Kugeln, von denen jede die leichtere bzw. die schwerere sein kann, die Lösung herauszufinden.

4.4.2. *Beweis durch Induktion.*

1. Schritt: Die Behauptung ist für w=2 richtig. Für $w=2\Rightarrow(w-1)=1$ gilt: Man hat $\frac{3^{w-1}-1}{2}=\frac{3-1}{2}=1$ Kugel, die entweder leichter oder schwerer ist wie das Norm-Maß. Diese wiegt man gegen die neutrale Kugel. Die Lösung ist dann die betreffende Kugel, sowie ob diese schwerer oder leichter ist wie die Neutrale.

2. Schritt: Für w gilt: Man hat $\frac{3^{w-1}-1}{2}$ Kugeln, von denen jede die leichtere bzw. die schwerere sein kann. Man wiegt nun $\frac{3^{w-2}+1}{2}$ Kugeln gegen $\frac{3^{w-2}-1}{2}$ und die neutrale Kugel.

(1) Gleichgewicht

Bleibt die Balkenwaage im Gleichgewicht, so hat man noch $\frac{3^{w-1}-1}{2} - \frac{3^{w-2}+1}{2} - \frac{3^{w-2}-1}{2} = \frac{3^{w-2}-1}{2}$ Kugeln, von denen jede die leichtere bzw. die schwerere sein kann. Da $(w-2) = (w-1)-1$, ist dies nach der Induktionsvoraussetzung lösbar.

(2) Ungleichgewicht

Ist eine Seite der Balkenwaage schwerer beladen als die andere, so hat man

$\frac{3^{w-2}+1}{2}$ Kugeln, von denen eine nur in eine Richtung (schwerer oder leichter) vom Norm-Maß abweichen kann, und

$\frac{3^{w-2}-1}{2}$ Kugeln, von denen eine nur in die genau entgegengesetzte Richtung (leichter oder schwerer) abweichen kann.

Andere Kugeln können die Lösung nicht mehr bilden.

Für die weitere Untersuchung hat man noch $(w-2)$ Wägungen zur Verfügung. Da $w > 2$ ($w = 2$ wurde im 1.Schritt abgehandelt) und man zusätzlich zu der schon existierenden neutralen Kugel eine weitere aus dem nicht gewogenen Haufen nehmen kann, ist dies, wie im Hilfsbeweis bewiesen wurde, lösbar.

Abschluß der Induktion. Soeben wurde bewiesen, dass $(w-1)$ Wägungen ausreichen, um aus $\frac{3^{w-1}-1}{2}$ Kugeln, von denen jede die leichtere bzw. die schwerere sein kann, die Lösung zu finden.

4.5. **Zusammenfassung.** Es wurde bewiesen, dass es innerhalb von w Wägungen möglich ist, aus $\frac{3^w-3}{2}$ Kugeln diejenige zu bestimmen, die ein anderes Gewicht wie die übrigen aufweist. q.e.d.